# Практика 4. Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

# Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

Предположим, что точность определения начальных условий $\Delta_1 << 1$, т.е. две фазовые точки, расстояние между которыми меньше либо равно $\Delta_1$, мы различить не можем. Пусть вся эволюция происходит в конечной области фазового пространства с характерным размером $R \sim 1$. За время

$$T_1 \sim \frac{1}{h} \ln \frac{R}{\Delta_1}$$

траектории разойдутся на расстояние порядка системы, т.е. предсказать уже ничего нельзя. Тогда

$$\Delta_2 \sim \exp(-hT_2) \sim \exp(-2hT_1) \sim \Delta_1^2,$$

т.е. для того, чтобы горизонт прогноза увеличился в два раза, нужна точность, равная квадрату предыдущей.

# Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

**Пояснения.**
Рассмотрим систему $x'(t) = f(x), x(0) = x^0$. На первый взгляд, кажется очевидным, что если мы будем рассматривать асимптотическое поведение ограниченных решений системы уравнений при $t \to \infty$, то $x(t)$ будет стремиться либо к постоянной, либо к периодической функции, и мы можем дать прогноз о ее значении на сколь угодно большое время.

Однако Э. Лоренц показал, что это не так. Оказалось, что если вектор $\overrightarrow{x}$ имеет три или более компонент, то модели могут описывать детерминированное непериодическое движение. (Это важно, например, потому, что линейные предикторы, полученные с помощью метода авторегрессии, в принципе не могут описывать такое поведение.) Математическим образом установившихся режимов являются притягивающие множества в фазовом пространстве — аттракторы.

Аттракторы, описывающие непериодическое движение, получили название **странных**.

# Как надо увеличить точность прогноза, чтобы его приемлемый горизонт прогноза вырос в 2 раза?

Типичным и очень важным свойством странных аттракторов является чувствительность к начальным данным. Грубо говоря, это свойство означает, что почти все бесконечно близкие траектории с течением времени экспоненциально разбегаются.
Отличия от регулярного движения:

1. Сложные, неповторяющиеся траектории;
2. Непредсказуемость поведения системы на больших временах (зависимость от начальных условий).

Отличие от случайного процесса состоит в том, что нерегулярность происходит из самой системы, а не от внешнего фактора (шум, флуктуации). В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к "запутыванию траекторий ".

**Аттрактор** – притягивающее предельное множество.

Компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности.

Пусть с течением времени произвольное начальное состояние из притягивающей области $G$, включающая в себя аттрактор $G_0$, релаксирует к $G_0$.

Движение, которому отвечает фазовая кривая в области притяжения, есть **переходный процесс**.

Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий к некоторому **инвариантному(остающееся неизменным при преобразованиях определённого типа) предельному множеству**, то есть аттрактору $G_0$.

Пусть $A$ — множество и $G$ — множество отображений из $A$ в $A$. Отображение $f$ из множества $A$ в множество $B$ называется инвариантом для $G$, если для любых $a \in A$ и $g \in G$ выполняется тождество $f(a) = f(g(a))$.

# Приложение с определениями.

Аттракторы типа состояний равновесия, предельных циклов или $n-$мерных торов называются **простыми** или **регулярными**.

**Странный аттрактор** – сложные притягивающие множества в фазовом пространстве размерности $N > 2$, допускающие возможность хаотического поведения динамических систем.